Übungen

Abgabetermin: Freitag 18.6. 10Uhr, Briefkästen 41, 42, 43 und 46

THEMEN: Der bedingte Erwartungswert

Aufgabe 32 (0,5+0,5+1+2+3 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $\mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ und $X, Y, X_1, X_2, ...$ integrierbare Zufallsgrößen. Zeigen Sie:

a) $E(\alpha X + \beta Y|\mathcal{F}) = \alpha E(X|\mathcal{F}) + \beta E(Y|\mathcal{F})$ P-f.s. für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) $X \leq Y$ P-f.s. $\Longrightarrow E(X|\mathcal{F}) \leq E(Y|\mathcal{F})$ P-f.s.

c) $E(E(X|\mathcal{F})) = EX$ und $|E(X|\mathcal{F})| \leq E(|X||\mathcal{F})$ P-f.s.

d) $X_n \uparrow X$ P-f.s. $\Longrightarrow E(X_n|\mathcal{F}) \uparrow E(X|\mathcal{F})$ P-f.s.

e) $X_n \to X$ P-f.s. und $\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n| \in \mathcal{L}_1(\mathfrak{A}) \Longrightarrow E(X_n|\mathcal{F}) \to E(X|\mathcal{F})$ P-f.s.

Aufgabe 33 (4 Punkte)
Es sei $X : ([0,1), \mathfrak{B}_{[0,1)}, \lambda\!\!\lambda_{[0,1)}) \longrightarrow ([0,1), \mathfrak{B}_{[0,1)})$ eine stetige, beschränkte, messbare Funktion und $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\mathcal{F}_n := \sigma\left(\left[0, \frac{1}{2^n}\right), \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right), \ldots, \left[\frac{2^n - 1}{2^n}, 1\right)\right)$$

eine aufsteigende Folge von Unter-σ-Algebren von $\mathfrak{B}_{[0,1)}$. Bestimmen Sie $E(X|\mathcal{F}_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} E(X|\mathcal{F}_n)$.

Aufgabe 34 (4 Punkte)
Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $\mathcal{F}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$, $X \in \mathcal{L}_2(\mathfrak{A})$ und

$$Var(X|\mathcal{F}) := E\left((X - E(X|\mathcal{F}))^2 |\mathcal{F}\right)$$

die *bedingte Varianz* von X unter $\mathcal{F}$. Zeigen Sie:

a) $Var(X|\mathcal{F}) = E(X^2|\mathcal{F}) - E(X|\mathcal{F})^2$.

b) $Var(X) = E(Var(X|\mathcal{F})) + Var(E(X|\mathcal{F}))$.

Bitte wenden!

Aufgabe 35 (5 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unanbhängiger, identisch verteilter und integrierbarer Zufallsgrößen und $S_n := \sum_{i=1}^n X_i, n \in \mathbb{N}$. Für ein festes $n \in \mathbb{N}$ erhält ein Beobachter den Wert von S_n, ein zweiter die Werte von $S_n, S_{n+1}, \ldots$ Welcher Beobachter erhält mit der Theorie der bedingten Erwartungswerte den besseren Approximanden für X_1 und wie sehen die beiden Approximanden aus?
Hinweis: Zeigen Sie, dass $\int_A X_1 \; dP = \int_A X_k \; dP$ für alle $A \in \sigma(S_n)$ und alle $1 \leq k \leq n$ gilt.